

CORSO DI STATICA E SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

A.A. 2024-2025

Prova scritta in aula del 17.10.2025

Parte II - Testo I

Nota: I risultati numerici vanno riportati a penna su questo stesso foglio, nei riquadri predisposti; i calcoli (in forma ordinata) vanno allegati sui soli fogli a quadretti che sono stati forniti.

Allievo:.....e-mail:..... Matricola:.....

Esercizio n. 1 (17 punti)

Risolvere mediante il Principio dei Lavori Virtuali (PLV) la struttura iperstatica riportata in Figura, assumendo, come incognita iperstatica, il momento flettente sull'appoggio di continuità B, M_B .

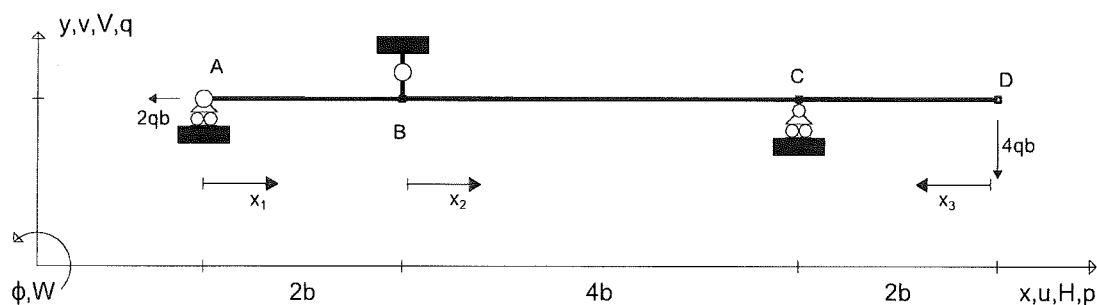
Dopo avere determinato l'iperstatica *tenendo conto solo della deformabilità flessionale*, calcolare le reazioni vincolari, le azioni interne e tracciare nello spazio predisposto nella pagina a fronte i corrispondenti grafici.

Calcolare infine, riapplicando il PLV, la rotazione del punto A, φ_A .

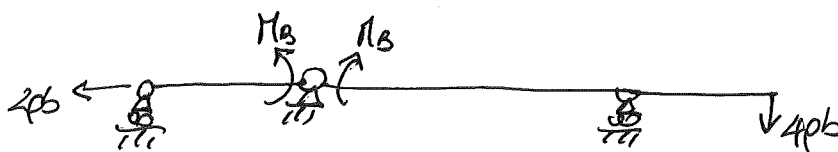
Si rammenta che il diagramma del momento flettente va riportato dalla parte delle fibre tese.

Universita' di Cagliari

SdC_SdA 2 17.10.25*001



EQ. DI CONGIUNTA: $\Delta\varphi(B) = 0$



Esercizio n. 2 (7 punti)

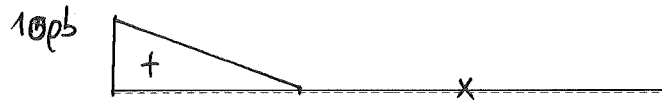
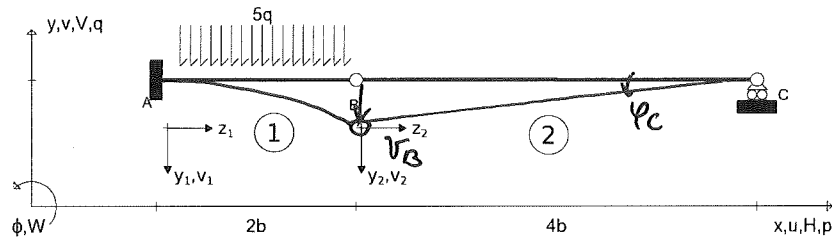
Per la struttura *isostatica*, indicata in Figura, determinare le reazioni vincolari e l'espressione delle azioni interne, nonché le condizioni al contorno imposte dai vincoli nei punti A , B e C .

Utilizzare quindi l'equazione della linea elastica per determinare:

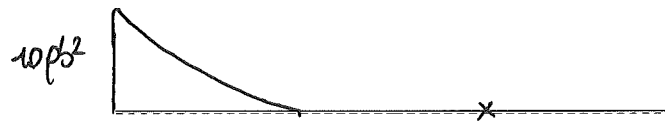
1. La deformata della linea d'asse, $v(z) = v_1(z_1) \cup v_2(z_2)$;
2. La sua derivata prima, $v'(z) = v_1'(z_1) \cup v_2'(z_2)$;
3. La rotazione del punto C , φ_C ;
4. Lo spostamento verticale del punto B , v_B .

Universita' di Cagliari

SdC_SdA_2 17.10.25*001



$\uparrow + \downarrow$

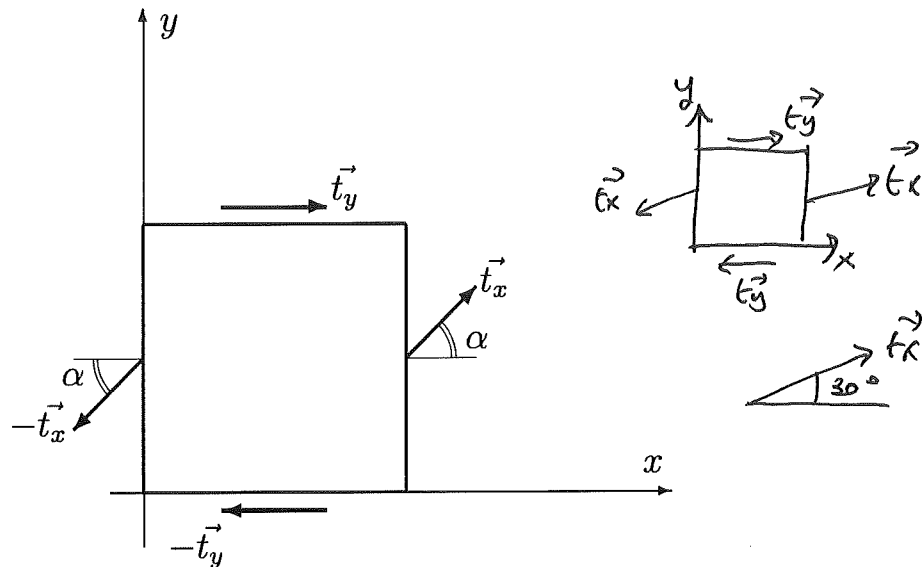


$\uparrow + \downarrow$

$$\begin{aligned}
 V_A(\hat{u}) &= 10pb; & H_A(\hat{v}) &= 0; & M_A(\hat{\phi}) &= 10pb^2; & V_C(\hat{u}) &= 0; \\
 N_{AB} &= //; & T_{AB} &= 10pb - 5pz_1; & M_{AB} &= -10pb^2 + 10pbz_1 - \frac{5}{2}qz_1^2; \\
 N_{BC} &= //; & T_{BC} &= //; & M_{BC} &= //; \\
 \text{c.c in } A &= v_1(z_1=0) = 0; \quad v_1'(z_1=0) = 0; & \text{c.c in } B &= v_1(z_1=2b) = v_2(z_2=0); \\
 & & \text{c.c in } C &= v_2(z_2=4b) = 0; \\
 v_1(z_1) &= \frac{1}{EI} \left(5pb^2z_1^2 - \frac{5}{3}pbz_1^3 + \frac{5}{24}qz_1^4 \right); & v_1'(z_1) &= \frac{1}{EI} \left(10pb^2z_1 - 5pbz_1^2 + \frac{5}{6}qz_1^3 \right); \\
 v_2(z_2) &= \frac{1}{EI} \left(-\frac{5}{2}pb^3z_2 + 10pb^4 \right); & v_2'(z_2) &= \frac{1}{EI} \left(-\frac{5}{2}pb^3 \right); \\
 v_B &= 10pb^4/EI \quad (\downarrow); & \varphi_C &= -5pb^3/2EI \quad (\downarrow);
 \end{aligned}$$

Esercizio n. 3 (9 punti)

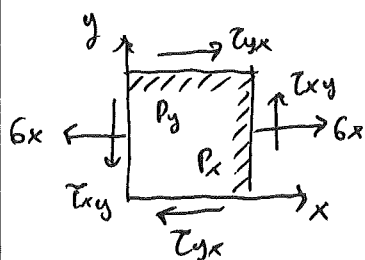
Un elemento di materiale *in condizioni di equilibrio* è soggetto lungo le facce aventi come normali gli assi x e y ai vettori sforzo (piani) t_x e t_y rispettivamente; di questi t_x è inclinato rispetto all'asse x di un angolo $\alpha = 30^\circ$ (sicché: $\sin \alpha = \frac{1}{2}$; $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$;) e ha modulo di valore $|t_x| = 15$ MPa. L'altro vettore sforzo, t_y , è invece *orizzontale* (ma di verso non specificato!), come indicato in Figura. Si chiede di determinare le componenti σ_x , σ_y e τ_{xy} del tensore degli sforzi, costruire il cerchio di Mohr, determinare gli sforzi principali, σ_1 e σ_2 , e la massima tensione tangenziale, τ_{\max} . Determinare inoltre quanto vale l'angolo φ formato dall'asse x e dall'asse normale alla faccia sulla quale agisce lo sforzo principale massimo, σ_1 .



$$\sigma_x = 12,990 \text{ (MPa)}; \sigma_y = 0,000 \text{ (MPa)}; \tau_{xy} = 7,500 \text{ (MPa)};$$

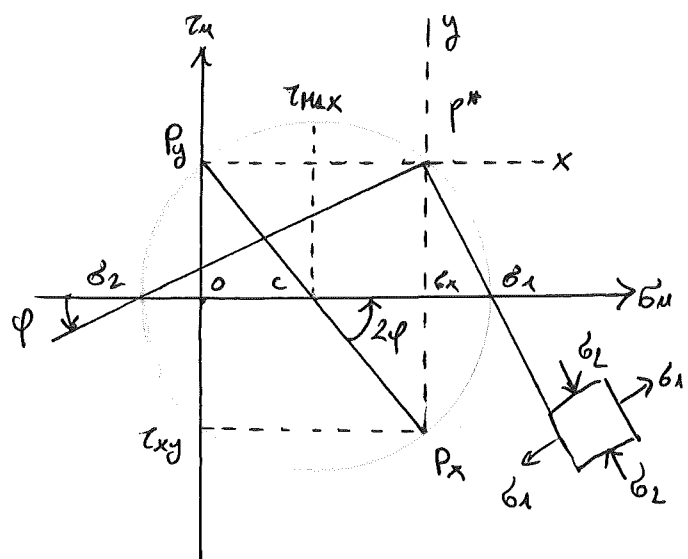
$$\sigma_1 = 16,417 \text{ (MPa)}; \sigma_2 = -3,426 \text{ (MPa)}; \tau_{\max} = 3,321 \text{ (MPa)};$$

cerchio di Mohr:

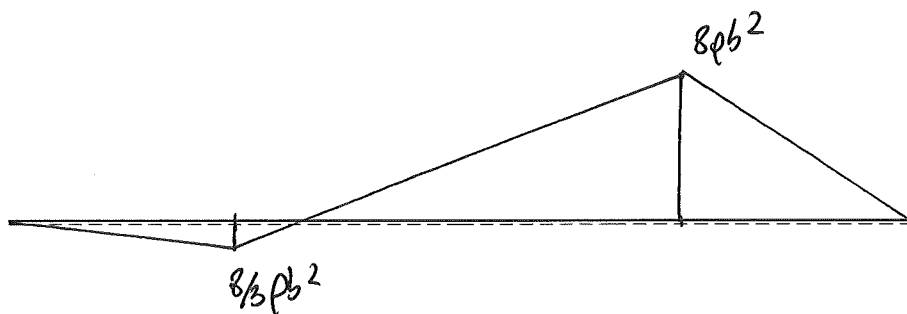
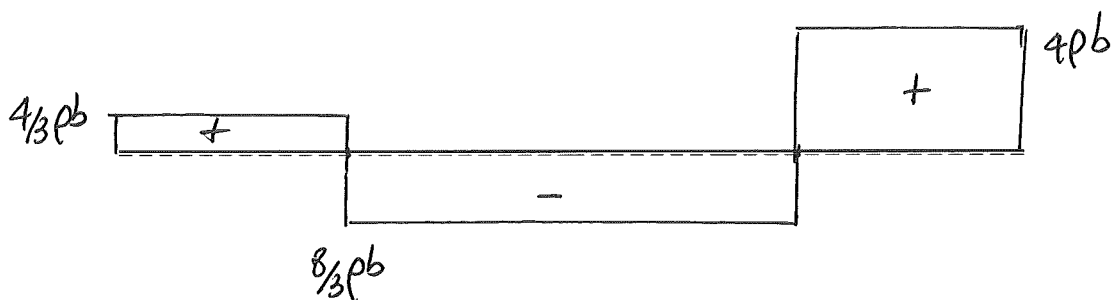
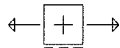
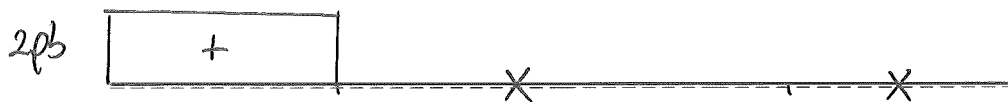


$$P_x = (12,990; -7,500)$$

$$P_y = (0,000; +7,500)$$



$$\varphi = 24,55 \text{ (}^\circ\text{)};$$



$V_A(\uparrow) = \frac{4}{3}pb$	$H_B(\Rightarrow) = 2pb$	$V_B(\uparrow) = -4pb$	$V_C(\uparrow) = \frac{20}{3}pb$	$M_B(\curvearrowright) = \frac{8}{3}pb^2$
$N_{AB} = \frac{2}{3}pb$	$T_{AB} = \frac{4}{3}pb$	$M_{AB} = \frac{4}{3}pb \times x_1$		
$N_{BC} = //$	$T_{BC} = -\frac{8}{3}pb$	$M_{BC} = \frac{8}{3}pb^2 - \frac{8}{3}pb \times x_2$		
$N_{DC} = //$	$T_{DC} = 4pb$	$M_{DC} = -4pb \times x_3$		
$\varphi_A = -\frac{8pb^3}{9EI} \quad (2)$				

CORSO DI STATICA E SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

A.A. 2024-2025

Prova scritta in aula del 17.10.2025

Parte II - Testo 2

Nota: I risultati numerici vanno riportati a penna su questo stesso foglio, nei riquadri predisposti; i calcoli (in forma ordinata) vanno allegati sui soli fogli a quadretti che sono stati forniti.

Allievo:.....e-mail:..... Matricola:.....

Esercizio n. 1 (17 punti)

Risolvere mediante il Principio dei Lavori Virtuali (PLV) la struttura iperstatica riportata in Figura, assumendo, come incognita iperstatica, il momento flettente sull'appoggio di continuità B, M_B .

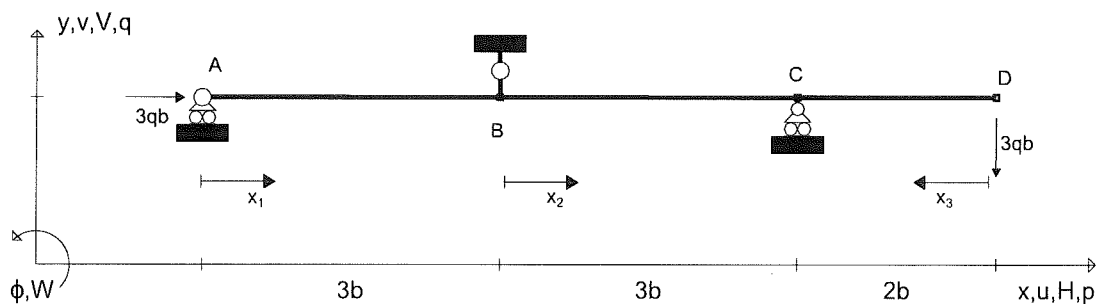
Dopo avere determinato l'iperstatica *tenendo conto solo della deformabilità flessionale*, calcolare le reazioni vincolari, le azioni interne e tracciare nello spazio predisposto nella pagina a fronte i corrispondenti grafici.

Calcolare infine, riapplicando il PLV, la rotazione del punto A, φ_A .

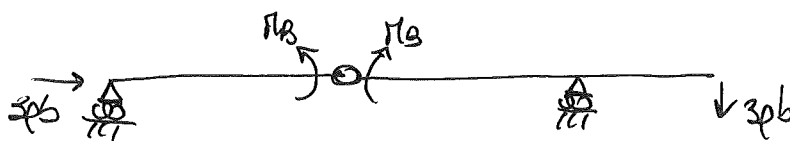
Si rammenta che il diagramma del momento flettente va riportato dalla parte delle fibre tese.

Universita' di Cagliari

SdC_SdA 2 17.10.25*002



EQ. DI CONGIUNTA: $\Delta p_{(B)} = 0$



Esercizio n. 2 (7 punti)

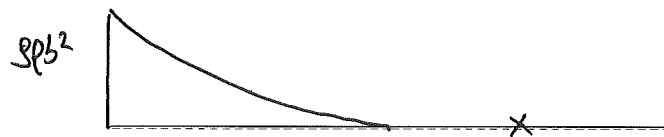
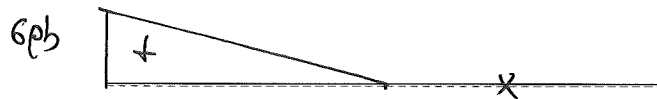
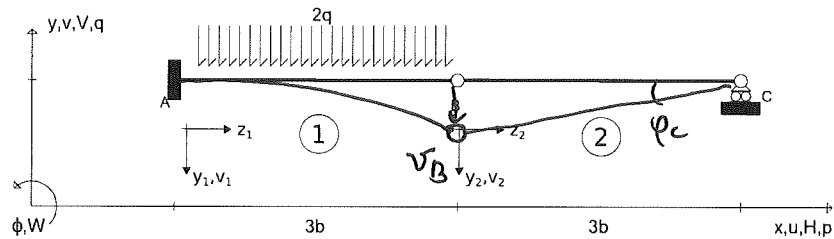
Per la struttura *isostatica*, indicata in Figura, determinare le reazioni vincolari e l'espressione delle azioni interne, nonché le condizioni al contorno imposte dai vincoli nei punti A , B e C .

Utilizzare quindi l'equazione della linea elastica per determinare:

1. La deformata della linea d'asse, $v(z) = v_1(z_1) \cup v_2(z_2)$;
2. La sua derivata prima, $v'(z) = v'_1(z_1) \cup v'_2(z_2)$;
3. La rotazione del punto C , φ_C ;
4. Lo spostamento verticale del punto B , v_B .

Universita' di Cagliari

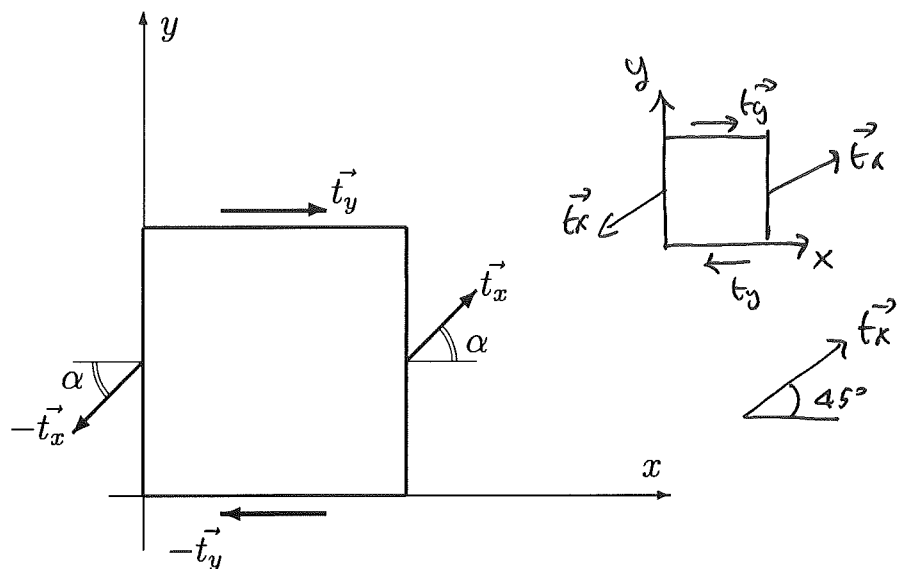
SdC_SdA_2 17.10.25*002



$$\begin{aligned}
 V_A (\uparrow) &= 6pb; & H_A (\Rightarrow) &= 0; & M_A (\curvearrowright) &= 3pb^2; & V_C (\uparrow) &= 0; \\
 N_{AB} &= //; & T_{AB} &= 6pb - 2pz_1; & M_{AB} &= -9pb^2 + 6pbz_1 - pz_1^2; \\
 N_{BC} &= //; & T_{BC} &= //; & M_{BC} &= //; \\
 \text{c.c in } A &= v_1(z_1=0)=0; & v'_1(z_1=0)=0; & \text{c.c in } B &= v_1(z_1=3b)=v_2(z_2=0); \\
 & \text{c.c in } C &= v_2(z_2=3b)=0; \\
 v_1(z_1) &= \frac{1}{EI} \left(\frac{9}{2} pb^2 z_1^2 - pb^2 z_1^3 + \frac{1}{12} q z_1^4 \right); & v'_1(z_1) &= \frac{1}{EI} (9pb^2 z_1 - 3pb^2 z_1^2 + \frac{1}{3} q z_1^3); \\
 v_2(z_2) &= \frac{1}{EI} \left(-\frac{27}{4} pb^3 z_2 + \frac{81}{4} pb^4 \right); & v'_2(z_2) &= \frac{1}{EI} \left(-\frac{27}{4} pb^3 \right); \\
 v_B &= \frac{81pb^4}{4EI} \quad (\downarrow); & \varphi_C &= -\frac{27pb^3}{4EI} \quad (\downarrow);
 \end{aligned}$$

Esercizio n. 3 (9 punti)

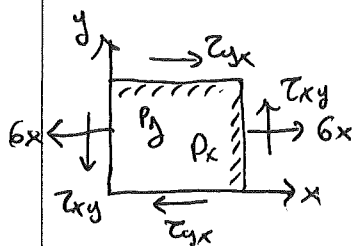
Un elemento di materiale *in condizioni di equilibrio* è soggetto lungo le facce aventi come normali gli assi x e y ai vettori sforzo (piani) t_x e t_y rispettivamente; di questi t_x è inclinato rispetto all'asse x di un angolo $\alpha = 45^\circ$ (sicché: $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$;) e ha modulo di valore $|t_x| = 15$ MPa. L'altro vettore sforzo, t_y , è invece *orizzontale* (ma di verso non specificato!), come indicato in Figura. Si chiede di determinare le componenti σ_x , σ_y e τ_{xy} del tensore degli sforzi, costruire il cerchio di Mohr, determinare gli sforzi principali, σ_1 e σ_2 , e la massima tensione tangenziale, τ_{\max} . Determinare inoltre quanto vale l'angolo φ formato dall'asse x e dall'asse normale alla faccia sulla quale agisce lo sforzo principale massimo, σ_1 .



$$\sigma_x = 10,606 \text{ (MPa)}; \sigma_y = 0,000 \text{ (MPa)}; \tau_{xy} = 10,606 \text{ (MPa)};$$

$$\sigma_1 = 17,162 \text{ (MPa)}; \sigma_2 = -6,555 \text{ (MPa)}; \tau_{\max} = 11,858 \text{ (MPa)};$$

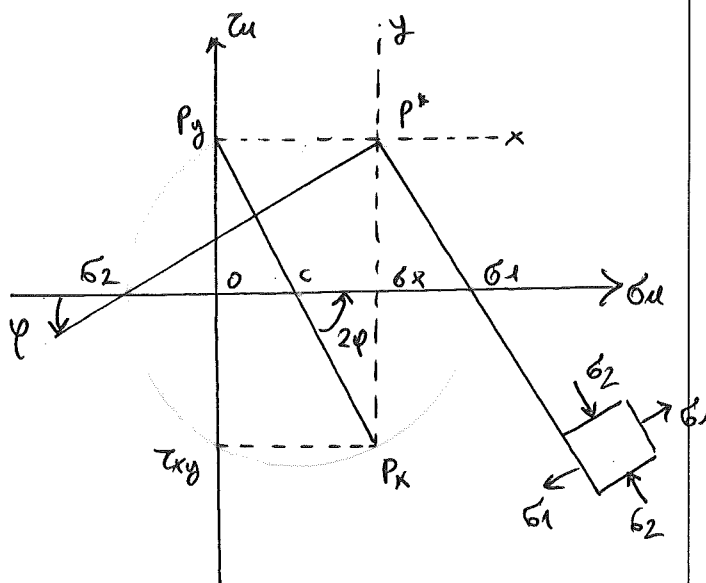
cerchio di Mohr:

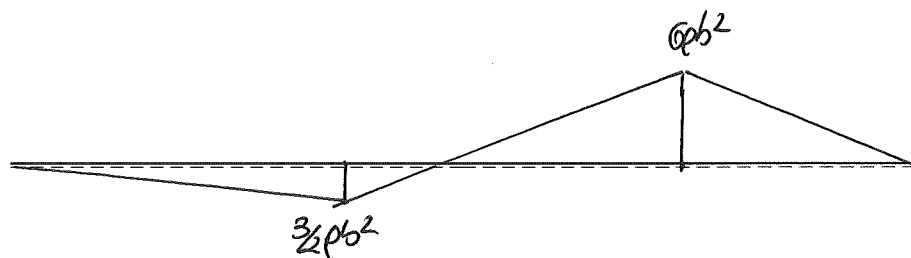
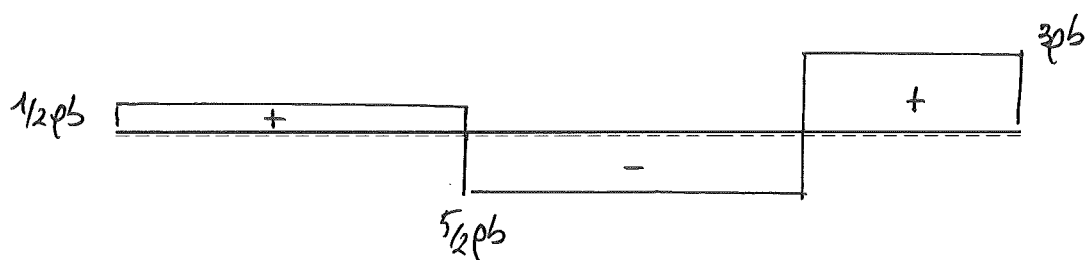
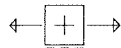
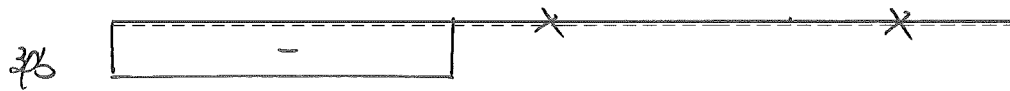


$$P_x = (10,606; -10,606)$$

$$P_y = (0,000; +10,606)$$

$$\varphi = 31,72 \text{ (}^\circ\text{)};$$





$V_A (\hat{u}) = \frac{1}{2} pb$; $H_B (\Rightarrow) = -3pb$; $V_B (\hat{u}) = -3pb$; $V_C (\hat{u}) = \frac{1}{2} pb$; $M_B (\hat{\varphi}) = \frac{3}{2} pb^2$;
 $N_{AB} = -3pb$; $T_{AB} = \frac{1}{2} pb$; $M_{AB} = \frac{1}{2} pb \times 1$;
 $N_{BC} = "$; $T_{BC} = -\frac{5}{2} pb$; $M_{BC} = \frac{3}{2} pb^2 - \frac{5}{2} pb \times 2$;
 $N_{DC} = "$; $T_{DC} = 3pb$; $M_{DC} = -3pb \times 3$;
 $\varphi_A = -\frac{3pb^3}{4EI} \quad (2)$

CORSO DI STATICA E SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

A.A. 2024-2025

Prova scritta in aula del 17.10.2025

Parte II - Testo 3

Nota: I risultati numerici vanno riportati a penna su questo stesso foglio, nei riquadri predisposti; i calcoli (in forma ordinata) vanno allegati sui soli fogli a quadretti che sono stati forniti.

Allievo:.....e-mail:..... Matricola:.....

Esercizio n. 1 (17 punti)

Risolvere mediante il Principio dei Lavori Virtuali (PLV) la struttura iperstatica riportata in Figura, assumendo, come incognita iperstatica, il momento flettente sull'appoggio di continuità B, M_B .

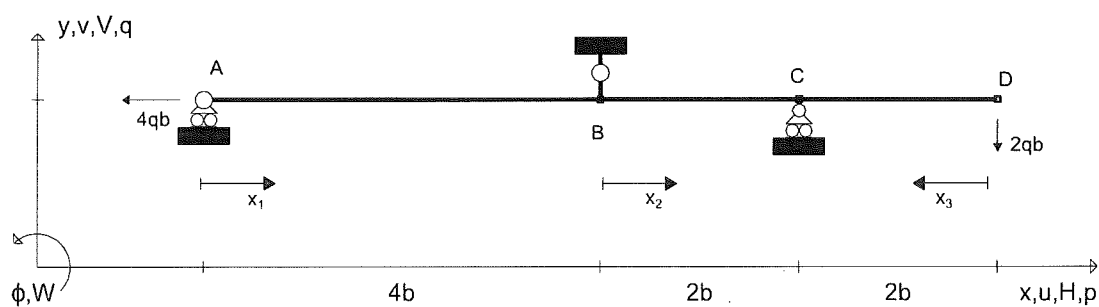
Dopo avere determinato l'iperstatica *tenendo conto solo della deformabilità flessionale*, calcolare le reazioni vincolari, le azioni interne e tracciare nello spazio predisposto nella pagina a fronte i corrispondenti grafici.

Calcolare infine, riapplicando il PLV, la rotazione del punto A, ϕ_A .

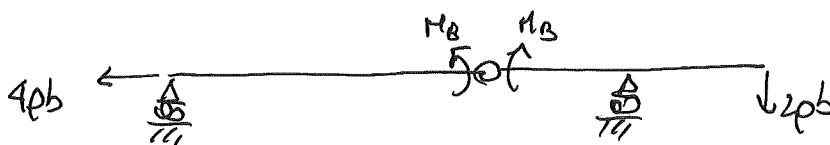
Si rammenta che il diagramma del momento flettente va riportato dalla parte delle fibre tese.

Universita' di Cagliari

SdC_SdA 2 17.10.25*003



ER. DI CONGIUNTA : $\Delta\phi_B = 0$



Esercizio n. 2 (7 punti)

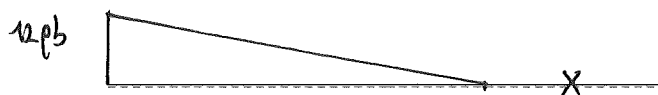
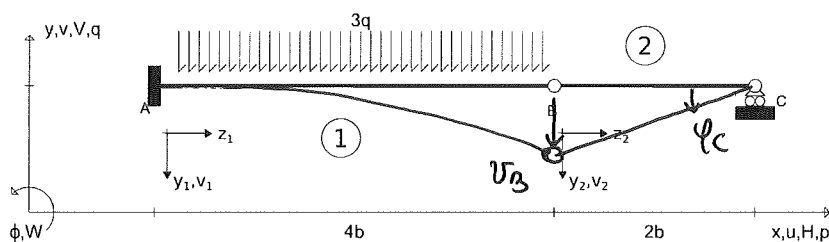
Per la struttura *isostatica*, indicata in Figura, determinare le reazioni vincolari e l'espressione delle azioni interne, nonché le condizioni al contorno imposte dai vincoli nei punti A , B e C .

Utilizzare quindi l'equazione della linea elastica per determinare:

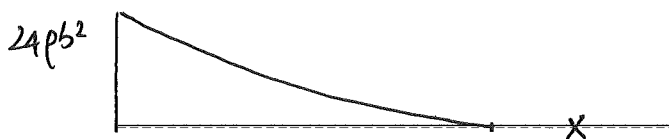
1. La deformata della linea d'asse, $v(z) = v_1(z_1) \cup v_2(z_2)$;
2. La sua derivata prima, $v'(z) = v_1'(z_1) \cup v_2'(z_2)$;
3. La rotazione del punto C , φ_C ;
4. Lo spostamento verticale del punto B , v_B .

Universita' di Cagliari

SdC_SdA_2 17.10.25*003



$\uparrow (+) \downarrow$

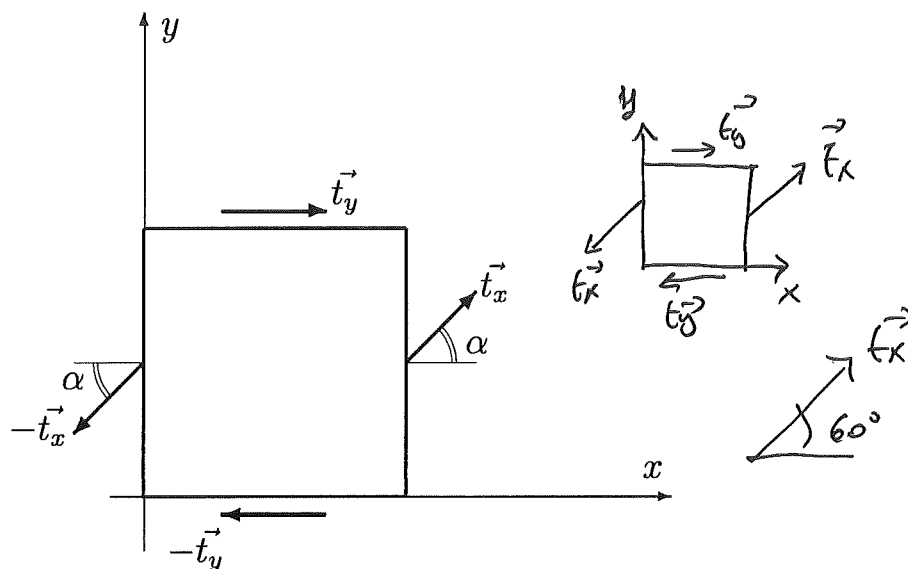


$\circ (+) \curvearrowright$

$$\begin{aligned}
 V_A(\uparrow) &= 12pb; & H_A(\Rightarrow) &= 0; & M_A(\curvearrowright) &= 24pb^2; & V_C(\uparrow) &= 0; \\
 N_{AB} &= //; & T_{AB} &= 12pb - 3pz_1; & M_{AB} &= -24pb^2 + 12pbz_1 - \frac{3}{2}pz_1^2; \\
 N_{BC} &= //; & T_{BC} &= //; & M_{BC} &= //; \\
 \text{c.c in } A &= v_1(z_1=0)=0; & v_1'(z_1=0) &= 0; & \text{c.c in } B &= v_1(z_1=4b) = v_2(z_2=0); \\
 & & \text{c.c in } C &= v_2(z_2=2b)=0; \\
 v_1(z_1) &= \frac{1}{EI} (12pb^2 z_1^2 - 2pbz_1^3 + \frac{1}{8}pz_1^4); & v_1'(z_1) &= \frac{1}{EI} (24pb^2 z_1 - 6pbz_1^2 + \frac{1}{2}pz_1^3); \\
 v_2(z_2) &= \frac{1}{EI} (-48pb^3 z_2 + 36pb^4); & v_2'(z_2) &= \frac{1}{EI} (-48pb^3); \\
 v_B &= \frac{96pb^4}{EI} \quad (\downarrow); & \varphi_C &= -\frac{48pb^3}{EI} \quad (\downarrow);
 \end{aligned}$$

Esercizio n. 3 (9 punti)

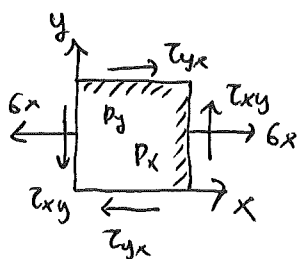
Un elemento di materiale *in condizioni di equilibrio* è soggetto lungo le facce aventi come normali gli assi x e y ai vettori sforzo (piani) \vec{t}_x e \vec{t}_y rispettivamente; di questi \vec{t}_x è inclinato rispetto all'asse x di un angolo $\alpha = 60^\circ$ (sicché: $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos \alpha = \frac{1}{2}$;) e ha modulo di valore $|\vec{t}_x| = 15$ MPa. L'altro vettore sforzo, \vec{t}_y , è invece *orizzontale* (ma di verso non specificato!), come indicato in Figura. Si chiede di determinare le componenti σ_x , σ_y e τ_{xy} del tensore degli sforzi, costruire il cerchio di Mohr, determinare gli sforzi principali, σ_1 e σ_2 , e la massima tensione tangenziale, τ_{\max} . Determinare inoltre quanto vale l'angolo φ formato dall'asse x e dall'asse normale alla faccia sulla quale agisce lo sforzo principale massimo, σ_1 .



$$\sigma_x = 7,500 \text{ (MPa)}; \sigma_y = 0,000 \text{ (MPa)}; \tau_{xy} = 12,990 \text{ (MPa)};$$

$$\sigma_1 = 17,211 \text{ (MPa)}; \sigma_2 = -9,711 \text{ (MPa)}; \tau_{\max} = 13,521 \text{ (MPa)};$$

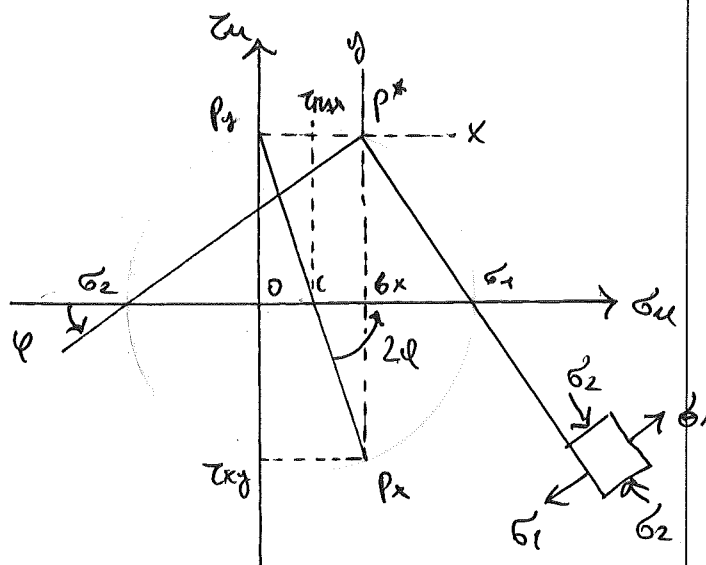
cerchio di Mohr:

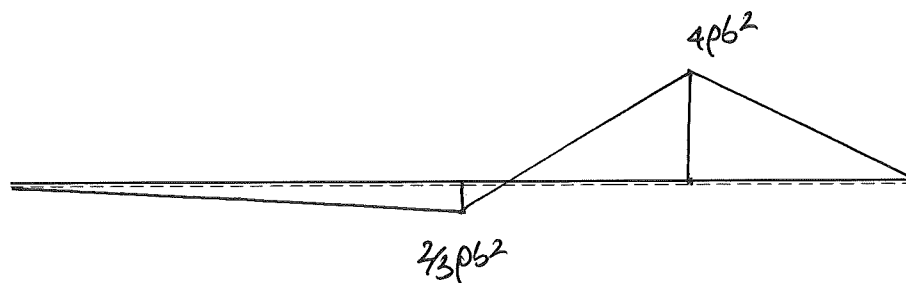
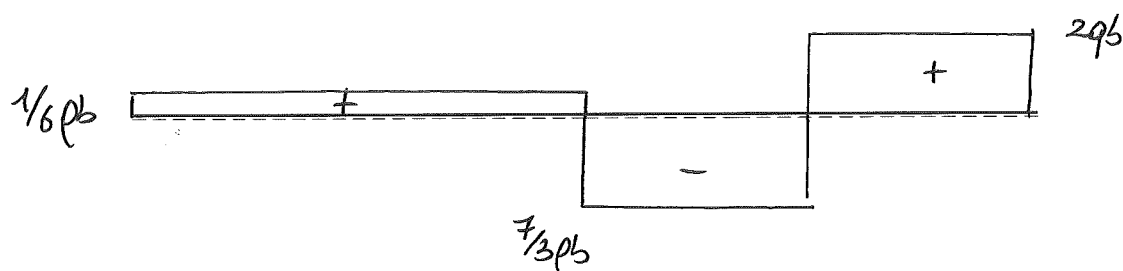


$$P_x = (7,500; -12,990)$$

$$P_y = (0,000; 12,990)$$

$$\varphi = 36,85^\circ;$$





$$\begin{aligned}
 V_A (\uparrow) &= \frac{1}{6} pb; & H_B (\Rightarrow) &= 4pb; & V_B (\uparrow) &= -\frac{5}{12} pb; & V_C (\uparrow) &= \frac{13}{12} pb; & M_B (\curvearrowright) &= \frac{2}{3} pb^2; \\
 N_{AB} &= 4pb; & T_{AB} &= \frac{1}{6} pb; & M_{AB} &= \frac{1}{6} pb \times 1; \\
 N_{BC} &= ""; & T_{BC} &= -\frac{7}{3} pb; & M_{BC} &= \frac{2}{3} pb^2 - \frac{7}{3} pb \times 2; \\
 N_{DC} &= ""; & T_{DC} &= 2pb; & M_{DC} &= -2pb \times 3; \\
 \varphi_A &= -\frac{4pb^3}{8ED} \quad (2)
 \end{aligned}$$